DS 4

Option informatique, deuxième année

Julien Reichert

Durée : 3 heures.

Questions de cours

Exercice 1 : Montrer que pour tout automate déterministe, il existe un automate déterministe émondé reconnaissant le même langage.

Exercice 2 : Montrer que pour tout automate déterministe, il existe un automate déterministe complet reconnaissant le même langage.

Exercice 3 : D'ailleurs, quelle est la complexité de la construction de l'automate équivalent dans les deux cas ? On suppose que l'automate est représenté en utilisant une bonne structure de données (laquelle ?).

Exercice 4 : Que dire d'un langage reconnu par un automate déterministe complet émondé ?

Questions de concours

On utilise les notations usuelles du cours, ainsi que les notations $|w|$ pour représenter la longueur du mot w et $|w|_a$ pour représenter le nombre d'occurrences de la lettre a dans w. On considère dans cet exercice l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Soit f une application quelconque définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $L(f)$ l'ensemble des mots u appartenant à Σ^* vérifiant l'égalité $|u|_a = f(|u|_b)$.

Question 1 : On considère la fonction f_1 définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_1(n) = 2$. Dessiner un automate reconnaissant le langage $L(f_1)$.

On considère la fonction $f_2(n) = n + 1$ modulo 2 (qui est aussi l'indicatrice de l'ensemble des entiers pairs).

Question 2 : Décrire $L(f_2)$ par une expression rationnelle de la forme $\alpha(bab+a+b)\beta$, où α et β sont des expressions rationnelles à déterminer. Justifier la réponse.

Question 3 : Dessiner un automate non nécessairement déterministe reconnaissant le langage décrit par l'expression rationnelle $bab + a + b$. Cet automate devra nécessairement posséder un seul état initial et un seul état final.

Question 4 : En s'appuyant sur l'expression rationnelle obtenue à la question 2, compléter l'automate obtenu à la question précédente pour obtenir un automate non déterministe reconnaissant le langage $L(f_2)$. Cet automate devra nécessairement posséder un seul état initial et un seul état final.

Question 5 : Déterminiser l'automate obtenu à la question précédente. On utilisera un algorithme vu en cours et on ne fera apparaître que les états accessibles depuis l'état initial.

Question 6 : Montrer que si f n'est pas majorée par une constante, alors $L(f)$ n'est pas rationnel.

Question 7 : On considère le langage $L_=$ sur Σ défini par $L_= = \{u \in \Sigma^*, |u|_a = |u|_b\}$. Le langage $L_=$ est-il rationnel ?

Question 8 : On considère le langage $L_\leq$ sur Σ défini par $L_\leq = \{u \in \Sigma^*, |u|_a \leq |u|_b\}$. Le langage $L_\leq$ est-il rationnel ? On utilisera le résultat de la question précédente.

Question 9 : On considère le langage $L_<$ sur Σ défini par $L_< = \{u \in \Sigma^*, |u|_a < |u|_b\}$. Le langage $L_<$ est-il rationnel ? On utilisera le résultat de la question précédente.

Question 10 : Montrer que la réciproque de la proposition énoncée dans la question 6 est fausse.

Indication : on pourra admettre que le langage des mots de la forme b^n où b est une lettre et n est un entier premier n'est pas rationnel.

Exercices de programmation

Exercice 6 : Énoncer un critère de divisibilité par 11. En déduire un critère de divisibilité par $b+1$ pour un nombre écrit en base $b \geq 2$. Écrire alors un programme en Caml qui détermine si un nombre entier positif écrit en binaire (et entré en tant que chaîne de caractères) est divisible par 3. Dessiner aussi un automate acceptant l'ensemble des nombres entiers positifs écrits en binaire (en tant que mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$) divisibles par 3.

Exercice 7 : Écrire un programme en Caml qui détermine si un nombre entré en tant que chaîne de caractères a ses chiffres dans l'ordre croissant. Dessiner aussi un automate acceptant l'ensemble des nombres entiers positifs (en tant que mots sur l'alphabet coïncidant avec l'ensemble des chiffres) vérifiant la propriété de la phrase précédente.